平成２９年度　九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻　２次募集入学試験問題

数　学

注意

１．各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。

２．問題１～問題５のうち３問を選んで解答すること。

３．３問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。

４．採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。

５．途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。

６．配点は各問題共５０点とする。

問題 1　以下の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\sin 2x$

(2) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=0$

(3) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-y=0$

問題 2　以下の積分を計算せよ。

（1）　$\int x\tan^2 x\,dx$

（2）　$\int \dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

（3）　$\int \dfrac{1}{x\left(x^2-1\right)^2}dx$ （ヒント：（2）の結果を利用せよ）

問題 3　漸化式 $x_{n+3}-6x_{n+2}+11x_{n+1}-6x_n=0$ がある。以下の問に答えよ。

（1）ベクトル $\vec{\mathrm{X}}_n$を

$$\vec{\mathrm{X}}_n=\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix}$$ のように定義する。$\vec{\mathrm{X}}_{n+1}=A\vec{\mathrm{X}}_n$となる行列$A$を求めよ。

（2）Aの固有値と固有ベクトルを求めよ。

（3）$P^{-1}AP$ が対角行列となる行列 P を求めよ。

（4）A^Nを求めよ。ここでNは自然数とする。

（5）$x_1=a$、$x_2=b$、$x_3=c$ の時 x_nを求めよ。

問題 4　$\vec{A}=(A_x, A_y, A_z)$をゼロでない任意のベクトル、その長さを$A=|\vec{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$、単位ベクトルを$\vec{a}=\vec{A}/A$とするとき、以下の問に答えよ。

（1）恒等式：$(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}=\vec{\nabla}\left(\dfrac{A^2}{2}\right)-\vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$ が成り立つことを示せ。

（2）$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{0}$が成り立つとき、$(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}$を$\vec{A}$の長さ$A$を用いて表せ。

問題　5　$y(x)$を $0 \leq x \leq \pi$の領域で定義された関数で、

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0$$

を満たし、$y(0)=y(\pi)=0$ であるものとする。ただし $y(x)$は恒等的にゼロではないとする。以下の問に答えよ。

（1）　$\lambda=\lambda_1$, $\lambda=\lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ の時の $y(x)$ をそれぞれ $y_1(x)$, $y_2(x)$ とした時、$\int_0^\pi y_1(x)y_2(x)dx=0$ となることを示せ。

（2）　$y(x)$が恒等的にゼロでないためには、λは実数であることが必要条件であることを示せ。

（3）　$y(x)$の具体的な表式とλが満たすべき条件を求めよ。