

平成29年度 九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻 入学試験問題

数 学

注意

1. 各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 問題1～問題5のうち3問を選んで解答すること。
3. 3問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。
4. 採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。
5. 途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。
6. 配点は各問題共50点とする。

問題 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad \log|x| - x^3 \sin x + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 6y = xe^x$$

$$(3) \quad \cos^4 y - \sin(2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

問題 2 以下の問に答えよ。

(1) n を自然数とするとき、 $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$ を計算せよ。 $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ を用いよ。

(2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$ を計算せよ。(ヒント：留数定理を用いてもよい)

(3) 楕円を原点の周りに回転して得られる曲線 $13x^2 + 10xy + 13y^2 = 72$ で囲まれた領域の面積を求めよ。

問題 3 行列 A を以下のように定義する。ただし、 a 、 $b(\neq 0)$ は実数である。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ。

- (1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ。複素数まで拡張して考えること。
- (2) $P^{-1}AP$ が対角行列になる行列 P を求めよ。
- (3) A^N を求めよ。ここで N は自然数とする。
- (4) 行列 X の指数関数をテイラー展開

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{4!}X^4 + \dots$$

に従って定義する。行列 $\exp(A)$ を求めよ。ここで I は単位行列である。

- (5) $a = 0$ とする時、行列 $\exp(A)$ はどのような変換を表すか。

問題 4 以下の問に答えよ。

(1) $\vec{u} = (-y, x, 0)$ を (x, y) 平面に図示せよ。

(2) $\nabla \times \vec{u}$ を計算せよ。

(3) $\nabla \cdot \vec{u}$ を計算せよ。

(4) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u})$ を計算せよ。

(5) 線積分 $\oint_C \vec{u} \cdot d\vec{l}$ を計算せよ。ここで積分路 C は (x, y) 平面の半径 1 の単位円周上とし、積分方向は反時計回りとする。

問題 5 関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$ と定義する。以下の問に答えよ。

ここで a は正の実数 ($a > 0$) とする。

(1)
$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

のフーリエ変換 $F(k)$ を求め、その実部と虚部を k の関数として図示せよ。それぞれのピークの位置と値も示せ。

(2) $g(x) = e^{-a|x|}$ のフーリエ変換を求めよ。

(3) $h(x) = \text{sign}(x)e^{-a|x|}$ のフーリエ変換を求めよ。ここで $\text{sign}(x)$ は

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

と定義される関数である。