

数 学

注意

1. 各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 問題1～問題5のうち3問を選んで解答すること。
3. 3問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。
4. 採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。
5. 途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。
6. 配点は各問題共50点とする。

問題 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) (1+x^2)\frac{dy}{dx} = y+3xy$$

$$(2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = x^2e^x$$

$$(3) (x^3-1)\frac{dy}{dx} + 3x^2y - \cos x = 0$$

問題 2 次の積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$$

$$(2) \int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}} dx$$

$$(3) \int x^2 \sin^{-1} x dx$$

問題 3 2行2列の行列を $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき、以下の間に答えよ。

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ。

ただし、固有ベクトルの絶対値は1とする。

(2) 行列 A を $P^{-1}AP$ によって対角化する。行列 P を求め、対角化せよ。

ただし、 P^{-1} は P の逆行列である。

(3) A^n を求めよ。ただし n は整数とする。

(4) A の指数関数 e^A を求めよ。

問題 4 周期 2π の実数関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \cos ax \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

で定義する。ただし、 x, a は実数で、 a は整数でないとする。以下の問に答えよ。

(1) $f(x)$ をフーリエ級数展開せよ。

(2) (1) の結果を用いて

$$\cot \pi a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} \right)$$

を示せ。

(3) (1) の結果を用いて

$$\frac{\pi a}{\sin \pi a} = 1 + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$$

を示せ。

問題 5 ベクトル \vec{r} は直交座標系 (x, y, z) の位置ベクトルで、その絶対値を r と表し、 n を整数、 ∇ をナブラ演算子とした場合、

$$\vec{A}_n = r^n \vec{r}$$

について以下を求めよ。

(1) $\nabla \cdot \vec{A}_n$

(2) $\nabla \times \vec{A}_n$

(3) 線積分 $\oint \vec{A}_n \cdot d\vec{l}$ (ここで $d\vec{l}$ は線要素ベクトルで、積分路は任意の閉曲線とする)

(4) $\vec{A}_n = \nabla f$ となるスカラー関数 f