

平成25年度 九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻 2次募集入学試験問題

数 学

注意

1. 各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 問題1～問題5のうち3問を選んで解答すること。
3. 3問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。
4. 採点は解答用紙の表のみで行うので裏には解答せず、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。
5. 途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。
6. 配点は各問題共50点とする。

問題 1 以下の微分方程式の一般解を求めよ。

$$(1) \quad x(y-3)\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} - \tan^2(x+y) = 0$$

$$(3) \quad \sin y \frac{dy}{dx} - (1 - x \cos y) \cos y = 0 \quad \left(u = \frac{1}{\cos y} \text{ とおいて解け} \right)$$

問題 2 次の不定積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x+1}} dx$$

$$(2) \int x \log(x^2 + 1) dx$$

$$(3) \int x \sin x \cos x dx$$

問題 3 次の n 次正方行列の行列式 D_n を計算する。以下の問に答えよ。

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(行列の i 行 j 列目の要素 a_{ij} は、対角要素($i=j$ のもの)およびその下及び上の要素 ($i=j\pm 1$ のもの)が 1 (ここで $1 \leq i, j \leq n$)、他の要素は 0)

- (1) D_1 、 D_2 、 D_3 をそれぞれ求めよ。
- (2) 一般式 $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$ を満たす p 、 q を求めよ。
- (3) (2) で求めた関係式を用いて D_n を求めよ。

問題 4 xyz 座標系の単位ベクトルを e_x, e_y, e_z とするとき、位置ベクトルは $r = xe_x + ye_y + ze_z$ 、その大きさは $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表わされる。 ∇ をナブラ演算子として、以下の間に答えよ。

(1) A を定ベクトルとするとき、 $\nabla \cdot (A \cdot \mathbf{r})A$ を求めよ。

(2) ∇r を r と \mathbf{r} で表わせ。

(3) A を定ベクトルとするとき、 $\nabla \cdot (A \times \mathbf{r})$ を求めよ。

(4) $\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ を求めよ。

問題 5 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(p)$ を以下の式で定義する。

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

以下の問に答えよ。

(1) $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換を求めよ。

(2) 上記 (1) の結果を利用して、次の積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+p^2} dp$$

(3) Parseval の等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)\}^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(p)|^2 dp$$

を用いて、以下の積分の値を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+p^2)^2} dp$$