平成２６年度　九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻　入学試験問題

数　学

注意

１．各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。

２．問題１～問題５のうち３問を選んで解答すること。

３．３問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。

４．採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。

５．途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。

６．配点は各問題共５０点とする。

問題 1　以下の問に答えよ。

（1）　微分方程式 $x^2\dfrac{dy}{dx}-xy+2y^2=0$ の一般解を求めよ。

（2）　微分方程式 $x=4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3+2$ の一般解を求めよ。

（3）　$\phi(X)$ と $\psi(X)$ は1変数 X の関数で、$X=x\pm ct$ の時の $\phi(x+ct)$ と $\psi(x-ct)$ は x、t に関する偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ の解であるとする。このことを利用して、

$$y=\phi(x+ct)+\psi(x-ct)+x^2+x+4c^2t^2$$

を解とする ϕ と ψ を陽に含まない偏微分方程式の一例を求めよ。ここで c は定数とする。

問題 2　x を実数とするとき、次の積分を計算せよ。

（1）　$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　$(0<a<1)$

（2）　$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$　（ $x=\dfrac{1}{y}$ とおいて解け ）

（3）　$\displaystyle\int \frac{1+x^2}{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{x^4-x^2+1}}dx$　$(0<x<1)$　（ $y=\dfrac{1}{x}-x$ とおいて解け ）

問題 3 以下の問に答えよ。ただし、$|A|$ は行列 A の行列式を表すこととする。

（1） 係数行列が正則行列である x、y についての連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y=b_2 \end{cases}$$

の解は、

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

となることを示せ。

（2） 係数行列が正則行列である x、y、z についての連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}$$

における x の解は、

$$x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となることを示せ。

（3） x、y、z についての連立１次方程式

$$\begin{cases} 2ax+y+az=0 \\ 7x+ay+az=0 \\ 8x+3y+3az=0 \end{cases}$$

が自明な解 $(x,y,z)=(0,0,0)$ 以外の解を持つための a の値を求めよ。

問題 4　xyz座標系の単位ベクトルを $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ とするとき、位置ベクトルは $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 、その大きさは $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で表わされる。∇ をナブラ演算子として、以下の問に答えよ。

（1）　r の関数 $f(r)$ に対して、$\nabla f(r)$ を df/dr および r と $\vec{r}$ で表わせ。

（2）　$\vec{A}$ を定ベクトルとするとき、$\nabla\cdot(\vec{A}\times(\vec{r}\times\vec{A}))=2|\vec{A}|^2$ となることを示せ。

（3）　$\nabla\times\vec{\omega}=0$ のとき、$\nabla\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})=0$ となることを示せ。

（4）　$\vec{A}$ 、$\vec{B}$ を定ベクトルとするとき、$\nabla\times((\vec{A}\cdot\vec{r})\vec{B})=\vec{A}\times\vec{B}$ となることを示せ。

問題 5　ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dw}{dz}+\left(1-\frac{\lambda^2}{z^2}\right)w=0$$

について以下の問に答えよ。ここで λ は正の整数、$w(z)$ は実変数 z の関数で $w(z)=z^\rho\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ と級数展開できるものとする。ただし、$a_0=A\neq 0$ の定数とする。

（1）　級数展開した $w(z)$ をベッセルの微分方程式に代入することで各級数の係数 a_n が満たすべき関係式を求めよ。

（2）　（1）で求めた関係式のうち最低次の係数より ρ と a_1 の値を求めよ。

（3）　（2）で求めた ρ のうち正のものについて、n が偶数と奇数の時に場合分けをして、a_n を求めよ。

（4）　$A=\dfrac{2^{-\lambda}}{\lambda!}$ として、ベッセル関数

$$J_\lambda(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(\lambda+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

がベッセルの微分方程式の解であることを示せ。