

平成28年度 九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻 2次募集入学試験問題

数 学

注意

1. 各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。
2. 問題1～問題5のうち3問を選んで解答すること。
3. 3問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。
その際、各解答用紙左上部に選択した問題番号を記入すること。
4. 採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。
5. 途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。
6. 配点は各問題共50点とする。

問題 1 次の微分方程式の一般解を求めよ。

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ ($z = \frac{dy}{dx}$ と置き、 y と z の方程式としてから解け)

(2) $3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y \frac{d^2y}{dx^2}$ (前問を参考とせよ)

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

問題 2 次の積分を計算せよ。

$$(1) \int \frac{dx}{2(x+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \quad (x>0 \text{ とする})$$

$$(2) \int \frac{2+3e^x}{1+e^x} dx$$

$$(3) \int x^2 \sin x \cos x dx$$

問題 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ について、以下の問に答えよ。

(1) A の固有値および階数を求めよ。

(2) $(A - kE)P = P \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる行列 P を求め、ジョルダン標準形を書け。ここで、 k

には (1) で求めた A の固有値の値を代入せよ。ただし E は単位行列とする。

(3) A^n を求めよ。その際に、 $A = D + N$ (D : 対角行列) として考えなさい。ただし n は自然数とする。

問題 4 位置座標 (x, y, z) のスカラー関数 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ について以下の問に答えよ。

(1) $\text{grad } \phi$ を求めよ。

(2) $\text{rot}(\text{grad } \phi)$ を計算せよ。

(3) $\phi(x, y, z) = 1$ を満たす図形を図示せよ。その上の点 $A(a, b, c)$ に接する平面の方程式を示せ。

(4) ベクトル関数 $\vec{\xi}(x, y, z) = (x, y, z)$ と $\text{grad } \phi$ が平行になる $\phi(x, y, z) = 1$ 上の点の条件を求めよ。

(5) $\phi(x, y, z) = 1$ の表面上での面積分 $\int \text{grad } \phi \cdot d\vec{S}$ を求めよ。

問題 5 関数 $\Gamma(s)$ を

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

と定義する。ここで s は $s > 0$ の実数とする。以下の問に答えよ。

- (1) $\Gamma(1)$ を求めよ。
- (2) $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$ を示せ。ただし $s > 1$ とする。
- (3) $\Gamma(n+1)$ を求めよ。ただし n は正の整数とする。
- (4) $\Gamma(1/2)$ を求めよ。ここで $I = \Gamma(1/2)$ として I^2 を評価したうえで求めよ。